UNIDAD DE APRENDIZAJE VI

Saberes procedimentales	Saberes declarativos
1. Interpreta y utiliza correctamente el lenguaje simbólico para el manejo de expresiones algebraicas. 2. Relaciona la ecuación algebraica de segundo grado con la gráfica que representa y viceversa.	**A** Ecuaciones de segundo grado y su clasificación
	B Raíces de una ecuación
	C Problemas de aplicación

OBJETIVO ESPECÍFICO

Al final de la unidad el estudiante aprenderá las propiedades de las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado y las irracionales con una incógnita, así como la forma de resolverlas. Aplicará los conocimientos adquiridos a la solución de problemas de la vida cotidiana.

1 Raíces

1.1. *Definición*

La **potenciación** se define como una multiplicación de factores iguales, esto es, si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}$, entonces…

$$a * a * a * a * a * \dots = a^n$$

$$-5^2 \neq (-5)^2$$

Lo anterior debe interpretarse como:

$$-5^2 = -(5 * 5) \qquad \text{y} \qquad (-5)^2 = (-5)(-5)$$

Es un error muy frecuente el considerar que son iguales las expresiones anteriores.

Raíz	Para un número natural $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{a}$ es una raíz n-ésima de $\boldsymbol{b}$, es el número sí solo sí $a^n = b$.

1.2. Raíz Cuadrada

El símbolo $\sqrt{\ }$, llamado **radical**, se usa para indicar raíz cuadrada de un número. Cada número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa de acuerdo a la definición de potenciación:

Ejemplo El número 64 tiene como raíces a 8 y -8, ya que:

$$(8)^2 = (8)(8) = 64 \qquad y$$

$$(-8)^2 = (-8)(-8) = 64$$

1.3. Raíz Imaginaria

No existen dos números iguales tales que l multiplicarse den como resultado -64. A la expresión $\sqrt{-64}$, por no existir solución en los números reales, se le da el nombre de ***raíz imaginaria,*** y se expresa con la letra minúscula "$\boldsymbol{i}$".

1.4. Raíz de una Potencia

Propiedades de los exponentes:

1. $\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$
2. $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{nm}}$
3. $\boldsymbol{(ab)^m = a^m b^m}$
4. $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$
5. $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & si\ m > n \\ 1 & si\ m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & si\ n > m \end{cases}}$

De acuerdo a lo anterior si se desea obtener la raíz cuadrada de 2^6, e representa de la siguiente forma:

$$\sqrt[2]{2^6} = (2)^{6/2} = 2^3 = 8$$

En forma general:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$$

Ejercicios Encontrar el resultado de cada una de las operaciones siguientes:

1. $\sqrt{25}$
2. $\sqrt{-25}$
3. $\sqrt{121}$
4. $8^{2/3}$
5. $\sqrt{729}$
6. $\sqrt{a^4}$
7. $(-8)^{5/3}$
8. $-\sqrt{25}$
9. $\left(5y^{1/3}\right)\left(7y^{1/2}\right)$
10. $\left(2a^{1/3} * b^{-2/3}\right)^3$
11. $\left(\frac{4m^{1/3}}{m^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}$
12. $\left(\frac{1}{m^{1/3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

2 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

2.1. Definición

El grado de una ecuación o un sistema de ecuaciones lo determina el exponente máximo que afecta la incógnita.

Una ecuación de **segundo grado** o **cuadrática** es aquella que después de efectuar las operaciones indicadas y de haber efectuado las reducciones o simplificaciones posibles y de pasar a uno de los dos miembros todos los elementos e igualarla a cero, el ***exponente mayor es dos.***

Forma General de una ecuación de segundo grado o cuadrática	$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

En donde $a \neq 0$ y:

$\boldsymbol{a} = coeficiente\ de\ la\ variable\ al\ cuadrado$

$\boldsymbol{b} = coeficiente\ de\ la\ variable\ lineal$

$\boldsymbol{c} = término\ independiente$

2.2. *Clasificación*

Las ecuaciones de segundo grado pueden presentar dos formas: **completas e incompletas.**

Forma de ecuaciones COMPLETAS	$ax^2 + bx + c = 0, \quad donde\ a, b\ y\ c\ son\ diferentes\ de\ cero$

Ejemplo Ecuaciones completas de segundo grado

a. $3x^2 + 5x - 10 = 0$ **b.** $x^2 + 7x + 10 = 0$ **c.** $-4x^2 - 8x + 2 = 0$

Ecuaciones INCOMPLETAS	Son ecuaciones de la forma: **A. Cuadrática Pura** $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ B. **Cuadrática Mixta** $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Ejemplo Ecuaciones incompletas de segundo grado

a. $3x^2 + 10 = 0\ \ (Pura)$ **b.** $x^2 + 7x = 0\ \ (Mixta)$ **c.** $-4x^2 - 2 = 0\ \ (Pura)$

Para resolver una ecuación de segundo grado se pueden emplear cualquiera de los siguientes métodos:

- ✓ Despejando la incógnita
- ✓ Por factorización
- ✓ Utilizando la fórmula general

Las ecuaciones incompletas es posible resolverlas sin necesidad de emplear la fórmula general, ya que solamente se hace el despeje, como se verá más adelante.

2.3. Representación gráfica

Al igual que la representación gráfica de las ecuaciones de primer grado que es una línea recta, al representar gráficamente una ecuación de segundo grado no siempre será igual, aunque todas las gráficas que se obtengan pertenecen a la familia de las cónicas.

La ecuación cuadrática hasta el momento solo está afectada por una variable o incógnita, y se hace necesario conocer dos variables para localizar punto en el plano cartesiano, y que una de ellas este en función de la otra, tomando la ecuación propuesta en función de la variable "y", esto es:

$$f(x) = y$$

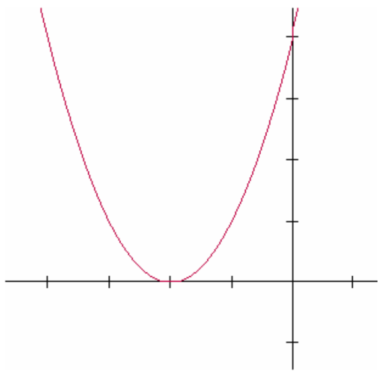
La variable se obtiene mediante una tabulación, dando valores arbitrarios a la independiente (se sugiere sean simétricos), esto es que cada valor de la variable independiente deberá calcularse el correspondiente a la dependiente.

Ejemplo Graficar la ecuación $y = f(x) = x^2 + 4x + 4$

Se tabula asignando valores arbitrarios a "x" para obtener el complemento del par ordenado "y".

Valor asignado	$\boldsymbol{x}$	-3	-2	-1	0	1	2
Valor calculado	$\boldsymbol{y}$	1	0	1	4	6	9

Al tener los pares ordenados se ubican en el plano cartesiano y se obtiene la gráfica:



La gráfica es una parábola en donde se confirma un axioma e geometría analítica que se verá más adelante en otro curso y dice "*toda ecuación de dos variables en la que una de ellas esta elevada al cuadrado su gráfica es una parábola*"

En la actualidad existen varios software que permite a quien estudia las ecuaciones cuadráticas, de una forma rápida y cómoda realizar sus gráficas con el auxilio de la computadora, por tal motivo, se sugiere utilizarlo para facilitar su comprensión.

Ejercicios En su cuaderno o en la computadora obtener la gráfica de las siguientes ecuaciones:

1. $y = f(x) = x^2 + 6x - 27$
2. $y = f(x) = 10x^2 - 11x - 6$
3. $y = f(x) = x^2 + 10x + 25$
4. $x = f(y) = 3y^2 + 7y - 21$
5. $x = f(y) = 10y^2 - 11y - 6$

2.4. *Solución de ecuaciones*

Las soluciones de la ecuación cuadrática son los valores que puede tomar la variable x que al sustituirlos verifican la igualdad.

Las igualdades pueden ser:

1. Condicionales, en cuyo caso se cumplen para solo algunos valores de la variable, por ejemplo, si $3x = 6$, solo se cumple la igualdad si $x = 2$.
2. Identidades: se cumplen para todos los valores permisibles de la variable, por ejemplo: $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$ es una identidad algebraica que se cumple para todos los valores de x.

2.41. Forma incompleta pura

Como se mencionó anteriormente estas ecuaciones carecen del término elevado a la primera potencia, por lo que simplemente se despeja la incógnita "x", por tanto:

$$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$$
$$\boldsymbol{ax^2 = -c}$$
$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}$$

De forma general se dice que este tipo de ecuaciones tiene dos soluciones que corresponden a número simétricos, y en algunos casos la raíz será imaginaria.

Ejemplo Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas puras

a. $2x^2 - 72 = 0$

$$x^2 = \frac{72}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

Comprobación con $+6$

$$2(6)^2 - 72 = 0$$
$$2(36) - 72 = 0$$
$$72 - 72 = 0$$
$$0 = 0$$

Comprobación con -6

$$2(-6)^2 - 72 = 0$$
$$2(36) - 72 = 0$$
$$72 - 72 = 0$$
$$0 = 0$$

b. $18x^2 + 3 = 0$

$$18x^2 = -3$$
$$x^2 = -\frac{3}{18}$$
$$x = \pm\sqrt{-\frac{3}{18}}$$
$$\boldsymbol{x = no\ es\ un\ número\ real}$$
$$\boldsymbol{x = i}$$

Ejercicios Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado despejando la incógnita: 1. $2x^2 - 18 = 0$ 2. $3x^2 - 48 = 0$ 3. $5x^2 - 9 = 46$
4. $27x^2 + 14 = 0$ 5. $3x^2 - 39 = 36$ 6. $-2x^2 + 7 = 0$

2.4.2. Forma incompleta mixta

Esta ecuación no tiene el término independiente "c", y el camino o método de solución es la factorización:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$$
$$\boldsymbol{x(ax + b) = 0}$$

Para que un producto sea ***cero***, cada factor o uno de ellos al menos deberán ser ***cero***, por tanto, la igualar el primer factor a cero se obtiene:

$$x(ax + b) = 0$$
$$x = \frac{0}{ax + b}$$
$$x = 0$$

Y al igualar el segundo factor a cero se tiene:

$$x(ax + b) = 0$$
$$ax + b = \frac{0}{x}$$
$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Por lo que las raíces de la ecuación incompleta mixta son:

$$\boldsymbol{x_1 = 0 \qquad y \qquad x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Ejemplo Resolver la siguiente ecuación cuadrática mixta

$$7x^2 + 6x = 0$$
$$x(7x + 6) = 0$$
$$\boldsymbol{x_1 = 0}$$

$$7x + 6 = 0$$
$$\boldsymbol{x_2 = -\frac{6}{7}}$$

Comprobación para $\boldsymbol{x_1 = 0}$

$$7(0)^2 + 6(0) = 0$$
$$0 + 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Comprobación para $\boldsymbol{x_2 = -\frac{6}{7}}$

$$7\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + 6\left(-\frac{6}{7}\right) = 0$$
$$7\left(\frac{36}{49}\right) - \frac{36}{7} = 0$$
$$\frac{7(36)}{7(7)} - \frac{36}{7} = 0$$
$$0 - 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Ejercicios Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado despejando la incógnita:

1. $x^2 - x = 0$	2. $x^2 + x = 0$	3. $7x^2 - x = 46$	4. $10x^2 - 15x = 0$
5. $3x^2 - 36x = 0$	6. $2x^2 - 3x = 0$	7. $8x^2 + 16x = 0$	8. $3x^2 - 4 = 28 + x^2$
9. $x^2 - 9x = 0$	10. $(x-5)(x+1) + 5 = 0$	11. $(3x-2)(3x+2) = 77$	12. $x^2 + 11x = 0$

2.4.3. Forma completa

La forma **canónica o completa** de una ecuación de segundo grado es:	$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ Donde a, b y c son número reales

Para despejar a "x" de la ecuación anterior se utiliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto, donde primero se aplican las propiedades de las igualdades, se multiplica por $4a$:

$$\boldsymbol{4a(ax^2 + bx + c = 0)}$$
$$\boldsymbol{4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0}$$

Se suma b^2 en ambos miembros de la ecuación

$$\boldsymbol{4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = 0 + b^2}$$
$$\boldsymbol{4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac}$$

Se factoriza el primer miembro

$$\boldsymbol{(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac}$$

Al extraer la raíz cuadrada a ambos miembros, y despejar "x", se obtiene

$$\boldsymbol{2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

Ésta última expresión se llama ***Fórmula General*** de la ecuación de segundo grado.

Algunas observaciones importantes para aplicar la fórmula general son:

- El coeficiente debe ser distinto de **cero** para poder dividir entre él. Esto realmente no es problema ya que si el coeficiente $\boldsymbol{a}$ es igual a **0**, la ecuación se reduce a una de primer grado.
- La ecuación de segundo grado debe ser igualada a **0.**

Se denomina **discriminante** de la fórmula general	$\boldsymbol{b^2 - 4ac}$

Al resolver la ecuación cuadrática, si el resultado del discriminante es:

- POSITIVO: se tienen dos soluciones REALES
- CERO: una solución es REAL
- NEGATIVO: se tienen soluciones COMPLEJAS o imaginarias

Ejercicios Determinar el carácter de las raíces de las ecuaciones siguientes, sin resolverlas:

1. $3x^2+5x-2=0$
2. $2x^2-4x+1=0$
3. $3x^2-2x+5=0$
4. $-4x^2+5x-3=0$
5. $-x^2-10x+25=0$
6. $5x^2-7x+8=0$
7. $2x^2-9x+7=0$
8. $x^2-10x-11=0$
9. $-2x^2+3x+8=0$
10. $-2x^2+x+7=0$
11. $x-5+3x^2=0$
12. $x^2-8x+25=0$

Ejemplo Resolver la siguiente ecuación cuadrática completa completando trinomio cuadrado perfecto

$$2x^2-4x=3$$

Se ordena e iguala a cero la ecuación y se identifican a, b y c:

$$2x^2-4x-3=0 \quad \text{donde} \quad a=2\ , \quad b=-4 \quad \text{y} \quad c=-3$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{4(10)}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}$$

$$x=\frac{2(2\pm\sqrt{10})}{2(2)}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1=\frac{2+\sqrt{10}}{2}} \qquad \boldsymbol{x_2=\frac{2-\sqrt{10}}{2}}$$

Ejercicios Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones por el método de la fórmula general

1. $(x+1)^2-\frac{3}{2}=0$
2. $(x+2)^2-\frac{5}{3}=0$
3. $x^2-6x+8=0$
4. $x^2+2x-15=0$
5. $-x^2-10x=-24$
6. $x^2-8x+16=0$
7. $-2x^2+21=-11x$
8. $3(x-1)(x+2)=3x-6$
9. $21x-100=x^2+21-x8=0$
10. $2x^2-1=1-x-x^2$
11. $(x-2)^2=3$
12. $x^2-\frac{x}{2}=\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

2.2.4. Por factorización

En toda ecuación cuadrática uno de sus miembros es un polinomio de segundo grado y el otro es cero; entonces, cuando el polinomio de segundo grado pueda factorizarse, tenemos que convertirlo en un producto de binomios.

Obtenido el producto de binomios, debemos buscar el valor de x de cada uno.

Para hacerlo igualamos a cero cada factor y se despeja para la variable. Igualamos a cero ya que sabemos que si un producto es igual a cero, uno de sus multiplicandos, o ambos, es igual a cero.

Además, es necesario recordar la propiedad del producto cero, la cual se expresa:

Sean a y b número reales. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Ejemplo Resolver mediante la descomposición factorial las siguientes ecuaciones:

a. $\boldsymbol{x^2 - 16 = 0}$

$x^2 - 16 = 0$ es una diferencia de cuadrados, entonces

$$(x-4)(x+4) = 0$$

Y aplicando la propiedad del producto cero se tiene:

$$x_1 - 4 = 0 \qquad\qquad x_2 + 4 = 0$$
$$\boldsymbol{x_1 = 4} \qquad\qquad \boldsymbol{x_2 = -4}$$

b. $\boldsymbol{x^2 - 5x = 0}$

En este caso "x" es un factor común. Entonces

$$(x)(x-5) = 0$$

A aplicar la propiedad del producto cero se tiene:

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 - 5 = 0$$
$$\boldsymbol{x_1 = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{x_2 = 5}$$

c. $\boldsymbol{x^2 + 10x + 25 = 0}$

La expresión es un trinomio cuadrado perfecto, que se factoriza como un binomio al cuadrado:

$$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = 0$$

Al aplicar la propiedad del producto cero se tiene:

$$x_1 + 5 = 0 \qquad\qquad x_2 + 5 = 0$$
$$\boldsymbol{x_1 = -5} \qquad\qquad \boldsymbol{x_2 = -5}$$

NOTA: si la expresión puede factorizarse como un trinomio cuadrado perfecto, ls dos raíces son iguales.

d. $\boldsymbol{x^2 - x - 6 = 0}$

La ecuación es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ que se factoriza:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$

Aplicar la propiedad del producto cero se tiene:

$$x_1 - 3 = 0 \qquad\qquad x_2 + 2 = 0$$
$$\boldsymbol{x_1 = 3} \qquad\qquad \boldsymbol{x_2 = -2}$$

e. $\boldsymbol{6x^2 + 11x - 10 = 0}$

La ecuación es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, que se factoriza:

$$(3x-2)(2x+5) = 0$$

Al aplicar la propiedad del producto cero se tiene:

$$3x_1 - 2 = 0 \qquad\qquad 2x_2 + 5 = 0$$
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{2}{3}} \qquad\qquad \boldsymbol{x_2 = -\frac{5}{2}}$$

2.4.5. Completando el cuadrado

Completar el cuadrado conlleva hallar el tercer término de un trinomio cuadrado perfecto cuando conocemos los primeros dos. Esto es, trinomios de la forma:

$$\boldsymbol{x^2 + bx + ? = 0}$$

Regla para hallar el último término de $x^2 + bx + ?$

El último término de un trinomio cuadrado perfecto (con $a = 1$) es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal. Esto es; el trinomio cuadrado perfecto cuyos dos primeros términos son $x^2 + bx$ es:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

Al completar el cuadrado queremos una ecuación equivalente que tenga un trinomio cuadrado perfecto a un lado. Para resolver la ecuación equivalente el número que completa el cuadrado debe sumarse a ambos lados de la ecuación.

$$ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4}}}}$$

Ejercicios Encuentre el término que debe sumarse a cada uno de las siguientes expresiones para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 + 6x$
2. $x^2 - 30x$
3. $x^2 + 10x$
4. $x^2 - 9x$
5. $x^2 - \frac{4}{5}x$
6. $x^2 - 12x$
7. $x^2 + \frac{1}{2}x$
8. $x^2 + \frac{3}{4}x$
9. $x^2 + \frac{2}{3}x$
10. $x^2 - \frac{5}{9}x$
11. $x^2 - 7x$
12. $x^2 - \frac{5}{7}x$

Ejemplo Resolver la siguiente ecuación completando el trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x = -6$$

El término que falta para completar el trinomio es $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, este valor se agrega a ambos miembros de la ecuación y se tiene:

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Al extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación resulta:

$$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

Ejercicios Resolver las siguientes expresiones completando el trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $x^2 = 6x - 9$
3. $x^2 + 10x + 2 = 0$
4. $x^2 - x - 1 = 0$
5. $3x^2 + 5x = 0$
6. $9x^2 - 2 - 3x = 0$
7. $x^2 + 7x - 6 = 0$
8. $2x^2 - 7x = 0$
9. $x^2 + \frac{2}{3}x - 8 = 0$
10. $x^2 - 3x - 18 = 0$
11. $5x^2 = -13x - 6$
12. $x^2 - 2x + 3 = 0$

EJERCICIOS ADICIONALES